НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

«На правах рукопису»
УДК 517.445________

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
__________ Романенко В.Д.
«___»_____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 124 Системний аналіз

на тему: «Квантизація групи рухів тривимірного простору за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку»

Виконав (-ла):
студент (-ка) II курсу, групи КА-61м
Михайловський Володимир Віталійович ___________

Науковий керівник:
Провідний науковий співробітник
Інституту математики НАН України,
д.ф-м. н, проф.,
Калюжний О.О. ___________

Рецензент:
____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ______________

Київ
2018

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 52 с., 1 додаток, 25 джерел.

Тема: «Квантизація групи рухів тривимірного простору за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку»

В роботі проводиться побудова квантової групи шляхом використання конструкції подвійного схрещеного добутку. За основу взята однозв'язна компонента групи рухів тривимірного простору. У роботі обчислені когомологічні групи і за допомогою них обчислені коцики для конструкції подвійного схрещеного добутку вибраної групи Лі.

Метою даної роботи є побудова квантової групи за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку. Об'єктом дослідження є квантова група, а предметом – проблема побудови квантової групи за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку.

ПОДВІЙНИЙ СХРЕЩЕНИЙ ДОБУТОК, КВАНТОВІ ГРУПИ, ГРУПА РУХІВ ТРИВИМІРНОГО ПРОСТОРУ, КОЦИКЛИ, ОПЕРАТОРНІ АЛГЕБРИ.

ABSTRACT

Masters' thesis: 52 p., 1 appendix, 25 sources.

The theme: "quntisation of group of motions of three-dimensional vector space by using double bicrossed product construction".

The construction of quantum group by using double bicrossed product construction is conducted. The group of motions of three-dimensional vector space is used as a basis. The cohomology groups of selected group are calculated and subsequently, 3-cocycles, neccecary for the double bicrossed product construction, are calculated.

The goal of the work is to construct the quantum group by using bicrossed product construction. The object of the work is the quantum group, the subject is the problem of construction of quantum group by using double bicrossed product construction.

DOUBLE BICROSSED PRODUCT, QUANTUM GROUPS GROUP OF MOTIONS OF THREE-DIMENSIONAL VECTOR SPACE, COCYCLES, OPERATOR ALGEBRAS .

ВСТУП

Робота присвячена побудові нового прикладу квантової групи на основі групи рухів тривимірного простору. Відмітимо, що відкриття В.Г.Дринфельдом [1] та М.Джимбо [2] квантових груп було одним з найвидатніших досягнень математики та математичної фізики кінця двадцятого сторіччя. Майже одночасно С. Л. Воронович [3] ввів квантову групу SUq(2) і розвинув теорію компактних квантових груп. Відкриття нової теорії та її швидкий розвиток зумовлений зв’язком між математикою та фізикою.

Розвиток теорії квантових груп привів до зв’язку теорії з багатьма, на перший погляд, далекими областями математики та фізики. Так, у фізиці мають місце зв’язки з методом квантової оберненої задачі розсіювання, теорією інтегрованих моделей, фізикою елементарних часток, конформною та квантовою теорією поля та ін[16]. В математиці квантові групи мають тісні зв’язки зі спеціальними функціями, деякими розділами комбінаторики, теорією представлень, некоммутативною геометрією, інваріантами вузлів та тривимірних многовидів, операторними алгебрами[9].

Разом з тим, в середині двадцятого сторіччя київським математиком Г. І. Кацем [3] з метою побудови теорії двоїстості для локльно компактних некомутативних груп було розпочато розвиток теорії кільцевих груп (зараз їх називають алгебрами Каца). Як виявилося, категорія алгебр Каца є підкатегорією категорії квантових груп. Як визнав В. Г. Дрінфельд, перші квантові групи з’явилися ще в роботах Г. І. Каца. Різниця між алгеброю Каца та квантовою групою полягає у тому, що в алгебрах Каца квадрат антипода дорівнює одиниці, а у квантових групах виконується більш складне співвідношення. Але, як показав Л.Й.Вайнерман[4], скінченна квантова група і алгебра Каца --- це один і той самий об’єкт.

Перший широкий клас локально компактних кванторвих груп або алгебр Каца, був отриманий на початку 60х років [18] для опису симметричним способом дуальність локально компактних груп. Цей клас включав окрім звичайних локально компактних груп і їх дуальних груп також деякі нетривіальні (тобто, некоммутативні і не ко-коммутативні) об'єкти. Загальна теорія алгебр Каца була отримана Г.І. Кацем і, незалежно від нього, М. Еноком і Дж.-М. Шварцем (для огляду див [12]). Однак, ця теорія була недостатньо загальною для того, щоб описати важливі нові приклади. Це мотивувало суттєві зусилля на отримання узагальнення, яке б було настільки ж елегантним і симметричним як і теорія алгебр Каца. Важливі кроки в цьому напрямку були зроблені С. Баажем і Дж. Скандалісом [4], С.Л. Вороновичем [7][8][25], Т. Масудою та Й. Накагамі [17] та А. Ван Даелем [22]. Загальна теорія локально компактних квантових груп була запропонована Дж. Кастермансом. Деякі мотивації і застосування цієї теорії можна побачити у [23].

На початку розвитку теорії квантових груп певний час було досить мало прикладів. Серед прикладів були алгебри В.Г.Дрінфельда – М.Джимбо та компактні квантові групи, які побудовані деформацією напівпростих груп Лі. В теорії алгебр Каца було знайдено лише один явний приклад – алгебра Каца-Палюткіна [5] розмірності 8. Тому задача побудови нових прикладів була і залишається досить актуальною. Тому для побудови нових прикладів з'явились певні конструкції. Конструкція подвійного схрещеного добутку з коціклами з'явилась ще у Г. І. Каца[5], а потім різними математиками (Ш. Маджід[6], С.Ваес та Л. Й. Вайнерман[7]) була перенесена на довільні локально компактні квантові групи, Л.Й.Вайнерман та М.Енок[8] запропонували конструкцію абелевого твістингу (тобто деформації).

Конструкція подвійного схрещеного добутку є одним із найпростіших способів отримання квантової групи. За Г.І. Кацем, для цієї конструкції необхідно:

1. Пара скінченних груп G_1 і G_2, наділена вдповідними діями першої на другу і другої на першу, або, що еквівалентно, G_1 і G_2 мають бути підгрупами великої групи G такими, що $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ і будь-який $g \in G$ може бути представлений у вигляді $g = g_1 g_2$. Таку пару груп будемо називату узгодженною парою.

2. Пара 2-коциклів на кожній із цих груп (що є відображеннями групи, що задовольняє вимозі $d^2 f = 0$), які є узгоджені певним співвідношенням із заданими діями. Пару груп із такими коциклами будемо називати коциклічно-узгодженною.

Природньо очікувати, що подібна конструкція валідна і для більш широкого класів об'єктів, аніж скінченні групи. Однак, для побудови коциклічно-узгодженних груп, необхідно вирішити дві задачі. По-перше, маючи пару узгоджених алгебр Лі (пошик яких є значно простіший), пара відповідних груп лі, отримана експоненціюванням, не завжди буде задовольняти вимогу A. Тому, пошук незв'язної компоненти групи із такою самою алгеброю є необхідним. По-друге, необхідно знайти коцикли на отриманих групах. Способи розв'язку цих проблем представлені у [13][16].

Дана робота присвячена побудові нового прикладу квантової групи на основі конструкції подвійного схрещеного добутку. Дана конструкція буде застосована до В першому розділі роботі буде представлений опис самої конструкції, отриманий у [14], описано спрощену схему знаходження усіх необхідних коциклів за рахунок точної послідовності, отриманої у [13]. В другому розділі роботи буде розглянуто детальний приклад застосування даної конструкції для однозв'язної компоненти групи Лі рухів тривимірного простору.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ СТОСОВНО ТВІСТІНГУ ТА АЛГЕБР КАЦА

В цьому розділі будуть дані означення квантової групи за [5]; означення 2,3-коциклів, когомологій як для алгебр Лі, так і для груп [8], коротко описані результати теореми ван Еста, необхідні для даної роботи; буде описана конструкція подвійного схрещеного добутку за допомогою точної послідовності, отриманої у [12]. Далі буде описана схема отримання коциклів для подвійного схрещеного добутку, отримана у [9].

1.1 Квантові групи

Дамо наступне означення квантової групи. Нехай A -- $C*$-алгебра Δ і невироджений *-гомоморфізм $\Delta : A \to M(A \otimes A)$ такий, що

- $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$;
- $A = \{(\omega \otimes \iota)\Delta(a) \mid \omega \in A^*, a \in A\} = \{(\omega \otimes \iota)\Delta(a) \mid \omega \in A^*, a \in A\}$.;

Також, припустимо, що існують:

- Уніваріативна лівоінваріантна наближено-KMS вага ϕ на (A, Δ);
- Правоінваріантна наближено-KMS вага ψ на (A, Δ).

Тоді будемо називати конструкцію (A, Δ) -- редукованою квантовою групою у $C*$ сенсі. Зазначимо, що із цих умов випливає уніваріативність ваги ψ. Покажемо це. Оскільки така бі-$C*$ алгебра задовольняє KMS-вимогам, наданим у [14]. Нехай (H, π, Λ) -- GNS-конструкція для ϕ. $W*$-підйом $\hat{\phi}$ ваги ϕ у GNS-конструкцій (H, π, Λ) є уніваріативною вагою. Оскільки ϕ -- уніваріативна,

π - ін'єктиція. Оскільки $\psi = \phi\pi$, бачимо, що і ϕ -- унікваріативна.

Варто зазанчаити, що остання аксіома у визначенні (правоінваріантність ψ) є не настільки строгою, як може здаватись. Можна показати, що за доволі слабких умов існує *-антигомоморфізм θ такий, що $\chi(\theta\otimes\theta)\Delta = \Delta\theta$. За допомогою нього, $\phi\Theta$ і буде правоінваріантою наближено-A вагою.

Також, зазначимо що якщо замінити умову наявності правоінваріантної ваги на умову існування θ, описаного вище, отримаємо визначення, дуже схоже на визначення алгебри Каца.

Не дивлячись на те, що ми вимагаємо унікваріативність лівоінваріантої ваги, це не має вбачатись як обмеження. Це більше є підготовчий крок для загального випадку. Для початку, ми розробимо теорію і побудуємо усі відповідні об'єкти для редукованого випадку. У загальному випадку, спочатку необхідно побудувати редуковану квантову групу у $C*$ -алгебраїчному сенсі та використовує ліворегулярні копредставлення для того, щоб опустити об'єкти із редукованої групи на вихідну $C*$-алгебру. Ця процедура може бути проведена без видимих перешкод у "універсальному" випадку і описана у [23]. Однак, приведемо нижче декілька зауважень стосовно загального нередукованого випадку.

У загальному випадку ми візьмемо $C*$ -алгебру A і невироджений *-гомоморфізм $\Delta : A \to M(A\otimes A)$ такий, що

- $(\Delta\otimes\iota)\Delta = (\iota\otimes\Delta)\Delta$;
- $\Delta(A)(A\otimes 1)$ і $\Delta(A)(1\otimes A)$ є щільними підмножинами у $A\otimes A$;

Також, ми приспускатимемо наявність

- лівоінваріантної наближено-KMS ваги ϕ на A;
- правоінваріантної наближено-KMS ваги ψ на A.

У [42] показано, що умови щільності виконуються і для редукованого випадку вище.

Наступним кроком, ми візьмемо GNS-конструкцію (H,π,Λ) для ϕ.

Редукована C^* -алгебра є, за означенням, $A_r = \pi(A)$. Для неї існує єдиний невироджений *-гомоморфізм Δ_r такий, що $(\pi \otimes \pi)\Delta = \Delta_r \pi$. Для нього доволі нескладно показати умови вище. Також, ці ваги задовольнятимуть умовам із [17]. а тому, можемо отримати W^*-підйоми $\hat{\phi}$ для ϕ і $\hat{\psi}$ для ψ відповідно.

Означимо ϕ_r як обмеження $\hat{\phi}$ на A_r^+ і ψ_r -- обмеження $\hat{\psi}$ на A_r^+. Ці ваги ϕ_r і ψ_r визначені як $\phi_r \pi = \phi$ і $\psi_r \pi = \psi$. Із результатів у [17], ми можемо зробити висновок, що

- ϕ_r -- є уніваріативна лівоінваріантна наближено- A вага;
- ψ_r -- є уніваріативна правоінваріантна наближено- A вага;

А тому, (A_r, Δ_r) -- редукована квантова група у C^*-алгебраїчному сенсі. Деякі властивості тепер можуть бути легко перенесені.

1.2 Конструкція подвійного схрещеного добутку

У [15] показано, що для побудови квантової групи, достатньо мати два коцикли u, v, що задовольняють вимогам:

$$u(g, h, s \triangleleft k) u(gh, k, s) = u(h, k, s) u(g, hk, s)$$

$$v(s \triangleright g, t, r) v(g, s, rt) = v(g, s, t) v(g, ts, r)$$

$$v(gh, s, t) u(g, h, ts) = u(g, h, s) u((s \triangleleft h) \triangleright g, s \triangleright h, t)$$
$$v(g, h \triangleleft s, (s \triangleright h) \triangleleft t) v(h, s, t)$$

1.3 Когомології та ізоморфізм ван Еста

Нехай G -- група Лі. Позначимо

$$C^n(G) = \left\{ f \in C(G^n, \mathbb{R}) \mid \exists i : g_i = e \Rightarrow f(g_1, \dots, g_n) = 0 \right\}$$

-- група неперервних нормалізованих $\mathbb{R}$-значних коланцюгів на полі дійсних чисел. Така послідовність груп утворює точну послідовність наступного вигляду:

$$0 \xrightarrow{d^1} C^1(G) \xrightarrow{d^2} C^2(G) \xrightarrow{d^3} \dots \xrightarrow{d^n} C^n(G) \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

Де оператори d^n задаються співвідношенням:

$$d^n(f)(g_1, g_2, \dots g_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, g_2, \dots, g_{i-1} g_i, \dots, g_n)$$

Оскільки ця послідовність точна, то виконується властивість $Ker\, d^i \supset Im\, d^{i-1}$. За рахунок цього можемо ввести позначення $Z_i(G) = Ker\, d^i$ -- група n-коциклів; $B_i(G) = Im\, d^{i-1}$ -- група n-кограниць; $H_i(G) = Z_i(G) \setminus B_i(G)$ -- група n-когомологій.

Нехай тепер $\mathfrak{g}$ -- відповідна G алгебра Лі. На цій алгебрі також існує схожа точна послідовність. Позначимо, за аналогією до груп, групу лінійних антисиметричних відображень:

$$C_n(\mathfrak{g}) = Hom(\Lambda^n \mathfrak{g}, \mathbb{R})$$

і назвемо їх групою коланцюгів.

Маємо змогу, за аналогією до групового випадку, ввести сім'ю операторів $d^n : C_n(\mathfrak{g}) \to C_{n+1}(\mathfrak{g})$ наступним чином:

$$d^n(f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{n+1} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n)$$

То ці групи також будуть утворювати точну послідовність:

$$0 \xrightarrow{d^1} C_1(\mathrm{g}) \xrightarrow{d^2} C_2(\mathrm{g}) \xrightarrow{d^3} \ldots \xrightarrow{d^n} C_n(\mathrm{g}) \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

У якій ми також за аналогією позначимо $Z_i(\mathrm{g}) = Ker\, d^i$ -- група n-коциклів; $B_i(\mathrm{g}) = Im\, d^{i-1}$ -- група n-кограниць; $H_i(\mathrm{g}) = Z_i(\mathrm{g}) \setminus B_i(\mathrm{g})$ -- група n-когомологій.

Теорема ван Еста стверджує, що групи когомологій цих двох точних послідовностей є ізоморфними, причому надає конструктивний спосіб отримання даного ізоморфізму, (що, природньо, дістав назву ізоморфізму ван Еста). Із кожним представником n-коланцюгів $f(x_1, \ldots, x_n)$ природнім чином можна зв'язати дифференційну n-форму ω. Тоді, ізоморфізм можливо знайти за формулою:

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \int_{\sigma(g_1, g_2, \ldots, g_n)} \omega$$

Де σ -- n-симплекс, що може бути знайдений за формулою:

$$\sigma(g_1, \ldots, g_n) = \gamma_{s_1}(g_1 \cdot \gamma_{s_2}(g_2 \cdot \gamma_{s_3}(\ldots(g_{n-1} \cdot \gamma_{s_n}(g_n))\ldots)))$$

А функція гамма задається співвідношенням

$$\gamma_s(g) = s \cdot g + (1 - s) \cdot e$$

Це, звісно ж, є не єдиний вигляд ізоморфізму ван Еста, однак, такого вигляду цілком достатньо для подальших обчислювальних потреб.

1.4 Точна послідовність Каца

У [9] показано, що для отримання коциклів для побудови квантової групи, існує точна послідовність

$$\ldots \to H^2(K) \xrightarrow{\pi_*^2} H^2(G) \oplus H^2(H) \overset{(}{\sigma_*}) \to$$
$$\overset{(\ *}{\sigma}\ ) \to E(M,N) \overset{(}{\iota_*}) \to H^3(K) \overset{(\ 3}{\pi_*}) \to H^3(M) \oplus H^3(N) \to \ldots$$

де $E(M,N)$ -- шукана група коциклів. Також отримано точний вигляд цих операторів і показано, що

$$E(M,N) = Im\sigma_* \oplus Im\tau_*$$

де τ_* -- зворотній оператор до ι_*.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі були розглянуті усі відомості, необхідні для подальшої конструкції нетривіального прикладу. Такими відомостями стали означення алгебри Каца і пов'язані із ним означення, два приклади алгебр Каца, пов'язаних із групами та опис конструкції твістінгу. Усі викладки були проведенні у скінченномивимірному випадку та для поля $\mathbb{C}$. Хоча аналогічні факти спраедливі і у загальному випадку, однак вони суттєво поскладнюються і їх узагальнення не потрібно для розгляду прикладу із цієї роботи.

РОЗДІЛ 2
ОПИС ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

В наступному розділі буде описана побудова квантової групи описаним вище методом для групи Лі рухів тривимірного простору.

2.1 Опис групи та виділення підгруп

Група Лі рухів тривимірного простору не є однозв'язною, а тому не є зручною для аналізу. Натомість, її однозв'язна компонента $SO_3(\mathrm{R}) \rtimes \mathrm{R}^3$ складається із перетвореннь площини, що зберігають орієнтацію. Як відомо, такі перетворення можуть бути представлені у вигляді із матриць наступного вигляду:

$$k = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

де $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ -- ортогональна матриця повороту, а $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ -- довільний вектор із R^3. Тут і надалі будемо позначати цю группу K.

Доволі природньо виділити наступні дві підгрупи у цієї групи - підгрупа паралельних зсувів $G : \mathrm{R}^3$ і підгрупа поворотів $H : SO_3(\mathrm{R})$. Ці підгрупи задовольняють вимогам $G \cdot H = K$ і $G \cap H = \{e\}$. У матричному вигляді ці підгрупи виглядають наступним чином:

$$h = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дана група має шість однопараметричних підгруп: повороти відносно координатних осей і переноси вздовж осей. У матричному вигляді:

$$a_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко побачити, що підгрупи $a_1(\phi), a_2(\theta), a_3(\psi)$ відносяться до підгрупи H, а підгрупи $b_1(x), b_2(y), b_3(z)$ --

Довільний елемент групи може бути представлений у вигляді добутку цих шести множників із деякими параметрами. Для цього розпишемо добуток $k(\phi,\theta,\psi,x,y,z) = a_1(\phi)a_2(\theta)a_3(\psi)b_1(x)b_2(y)b_3(z)$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \begin{matrix} -\cos(\psi)\sin(\phi) - \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) \end{matrix} & \begin{matrix} -\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \\ \sin(\phi)\sin(\psi) \end{matrix} & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \begin{matrix} \cos(\phi)\cos(\psi) - \\ \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) \end{matrix} & \begin{matrix} -\cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) - \\ \cos(\phi)\sin(\psi) \end{matrix} & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1(x) \cdot b_2(y) \cdot b_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\psi)\sin(\phi)- & -\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)+ & 0 \\ & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\psi) & \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\psi)- & -\cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta)- & 0 \\ & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\psi) & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\phi)- & \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)+ & x \\ & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\psi) & \\ -\cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\psi)+ & -\cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta)+ & y \\ & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\psi) & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Прирівнюючи загальний матричний вигляд елемента групи до отриманого вигляду, можемо записати систему для знаходження параметрів ϕ,ψ,θ (параметри x, y, z є просто відповідними елементами матриці)

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\psi)\sin(\phi)- & -\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta)+ & 0 \\ & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\psi) & \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\psi)- & -\cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta)- & 0 \\ & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\psi) & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} R_{11} = \cos(\phi)\cos(\theta) \\ R_{12} = -\cos(\psi)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) \\ R_{13} = -\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ R_{21} = \cos(\theta)\sin(\phi) \\ R_{22} = \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) \\ R_{23} = -\cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) - 7\cos(\phi)\sin(\theta) \\ R_{31} = \sin(\theta) \\ R_{32} = \cos(\theta)\sin(\psi) \\ R_{33} = \cos(\theta)\cos(\psi) \end{cases}$$

Можна показати, що ця система завжди сумісна у разі, коли R -- матриця повороту, і має два розв'язки на проміжку $[0,2\pi]$ коли $\cos(\theta) \neq 0$ і безліч, коли $\cos(\theta) = 0$ (із геометричних міркувань це можна пояснити тим, що при такому куті θ вісь x переходить у вісь z після повороту, і третій поворот може відмінити перший поворот). Для подальшого аналізу ми можемо не розглядати загальний випадок розв'язків, а лише у малому околі одиниці. Тоді система однозначно розв'язується і формула має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \theta = \arcsin(R_{33}) \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{R_{21}}{R_{11}}\right) \\ \psi = \arctan\left(\dfrac{R_{33}}{R_{32}}\right) \end{cases}$$

Для подальшої побудови нам також необхідно буде задати дію одної підгрупи на іншу. Задамо їх наступним чином -- нехай підгрупа G не діє на підгрупу H, тобто $\forall g \in G\, h \triangleleft g = h$. Дію H на G знайдемо із співвідношення $hg = (h \triangleright g) \cdot (h \triangleleft g)$. Можна переконатись, що якщо записати $g = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і

$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ то наступне задання дії буде правильним:

$$h \triangleright g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ 0 & 1 & 0 & R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ 0 & 0 & 1 & R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Побудова відповідних алгебр Лі

Маючи однопараметричні підгрупи, описані у попередній секції, можемо побудувати алгебру Лі за допомогою дотичного векторного простору у одиниці групи. Оскільки одиниця у матричному представленні цієї групи - це одинична матриця, тобто $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то легко побачити, що $e = k(0,0,0,0,0,0)$. Іншими словами, для отримання базису у алгебрі Лі, похідні треба брати в точці 0 для кожної підгрупи.

$$[]\frac{d}{d\phi}a_1(\phi)\phi=0=[]\begin{pmatrix}-\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0\\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\phi=0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[]\frac{d}{d\theta}a_2(\theta)\theta=0=[]\begin{pmatrix}-\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\theta=0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[]\frac{d}{d\psi}a_3(\psi)\psi=0=[]\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0\\ 0 & -\cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\psi=0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[]\frac{d}{dx}b_1(x)x=0=[]\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}x=0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[]\frac{d}{dy}b_2(y)y=0=[]\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}y=0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[]\frac{d}{dz}b_3(z)z=0=[]\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}z=0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Позначимо відповідні базисні елементи алгебри a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 . Тепер знайдемо їх комутатори. Оскільки група і алгебра мають матричне представлення, то комутатор можна шукати за формулою

$$[X,Y]=XY-YX$$

Відповідно, для пошуку усіх комутаторів необхідно знайти усі попарні добутки. Випишемо їх

$$a_1 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 \cdot a_1 = b_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot a_3 = b_2 \cdot a_1 = b_2 \cdot a_2 = b_2 \cdot a_3 = b_3 \cdot a_1 = b_3 \cdot a_2 = b_3 \cdot a_3 = a_1 \cdot b_3 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_1 = 0$$

Таким чином, можемо записати наступну таблицю комутаторів:

$[\cdot,\cdot]$	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
a_1	a_3	$-a_2$	b_2	$-b_1$	0
a_2		a_1	b_3	0	$-b_1$
a_3			0	b_3	$-b_2$

Решта комутаторів знаходяться із властивостей комутатора, а також того факту, що група паралельних переносів комутатовна.

2.3 3-когомології

Для пошуку елементу точної послідовності Каца $H^3(\mathrm{K})$

$$
\begin{aligned}
(d^{n-1} f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) + \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

Де запис $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$ означає всі без і-го члена, тобто $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Для конструкції подвійного схрещеного добутку необхідна 3-когомологія, що є фактором $Ker\, d^3 \setminus Im\, d^2$. Відповідно, нам потрібні оператори d^2 і d^3. Розпишемо їх.

$$
\begin{aligned}
(d^2 f)(x_1, x_2, x_3) &= f(x_2, x_3) - f(x_1, x_3) + f(x_1, x_2) - \\
&- f([x_1, x_2], x_3) + f([x_1, x_3], x_2) - f([x_2, x_3], x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(d^3 f)(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_3, x_4) + \\
&+ f(x_1, x_2, x_4) - f(x_1, x_2, x_3) - \\
&- f([x_1, x_2], x_3, x_4) + f([x_1, x_3], x_2, x_4) - \\
&- f([x_1, x_4], x_2, x_3) - f([x_2, x_3], x_1, x_4) + \\
&+ f([x_2, x_4], x_1, x_3) - f([x_3, x_4], x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Покажемо, що образ d^3 дійсно вкладений у ядро d^3, тобто $d^3 \circ d^2 = 0$. Розпишемо цей вираз за допомогою формули вище.

$$
\begin{gathered}
d^3 \circ d^2 f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (d^3 f)(x_2,x_3,x_4) - (d^3 f)(x_1,x_3,x_4) + (d^3 f)(x_1,x_2,x_4) - (d^3 f)(x_1,x_2,x_3) \\
-(d^3 f)([x_1,x_2],x_3,x_4) + \\
+(d^3 f)([x_1,x_3],x_2,x_4) - (d^3 f)([x_1,x_4],x_2,x_3) - (d^3 f)([x_2,x_3],x_1,x_4) + \\
(d^3 f)([x_2,x_4],x_1,x_3) - (d^3 f)([x_3,x_4],x_1,x_2) = \\
= (f(x_3,x_4) - f(x_2,x_4) + f(x_2,x_3) - f([x_2,x_3],x_4) + f([x_2,x_4],x_3) - f([x_3,x_4],x_2)) - \\
-(f(x_3,x_4) - f(x_1,x_4) + f(x_1,x_3) - f([x_1,x_3],x_4) + f([x_1,x_4],x_3) - f([x_3,x_4],x_1)) + \\
+(f(x_2,x_4) - f(x_1,x_4) + f(x_1,x_2) - f([x_1,x_2],x_4) + f([x_1,x_4],x_2) - f([x_2,x_4],x_1)) - \\
-(f(x_2,x_3) - f(x_1,x_3) + f(x_1,x_2) - f([x_1,x_2],x_3) + f([x_1,x_3],x_2) - f([x_2,x_3],x_1)) - \\
-(f(x_3,x_4) - f([x_1,x_2],x_4) + f([x_1,x_2],x_3) - f([[x_1,x_2],x_3],x_4) + f([[x_1,x_2],x_4],x_3) - f([x_3,x_4],[x_1,x_2])) + \\
+(f(x_2,x_4) - f([x_1,x_3],x_4) + f([x_1,x_3],x_2) - f([[x_1,x_3],x_2],x_4) + f([[x_1,x_3],x_4],x_2) - f([x_2,x_4],[x_1,x_3])) - \\
-(f(x_2,x_3) - f([x_1,x_4],x_3) + f([x_1,x_4],x_2) - f([[x_1,x_4],x_2],x_3) + f([[x_1,x_4],x_3],x_2) - f([x_2,x_3],[x_1,x_4])) - \\
-(f(x_1,x_4) - f([x_2,x_3],x_4) + f([x_2,x_3],x_1) - f([[x_2,x_3],x_1],x_4) + f([[x_2,x_3],x_4],x_1) - f([x_1,x_4],[x_2,x_3])) + \\
+(f(x_1,x_3) - f([x_2,x_4],x_3) + f([x_2,x_4],x_1) - f([[x_2,x_4],x_1],x_3) + f([[x_2,x_4],x_3],x_1) - f([x_1,x_3],[x_2,x_4])) - \\
-(f(x_1,x_2) - f([x_3,x_4],x_2) + f([x_3,x_4],x_1) - f([[x_3,x_4],x_1],x_2) + f([[x_3,x_4],x_2],x_1) - f([x_1,x_2],[x_3,x_4])) \\
= f(x_2,x_4) + f(x_1,x_3) - f(x_3,x_4) - f(x_2,x_3) - f(x_1,x_4) - f(x_1,x_2)
\end{gathered}
$$

Бачимо, що не всі доданки скоротились, а тому формула вище не застосовна для нашого випадку. Нам необхідна наступна формула.

$$
(d^{n-1} f)(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)
$$

Що для наших потреб переписується у вигляді

$$
\begin{gathered}
(d^2 f)(x_1,x_2,x_3) = f([x_1,x_2],x_3) + f([x_1,x_3],x_2) - f([x_2,x_3],x_1) \\
(d^3 f)(x_1,x_2,x_3,x_4) = f([x_1,x_2],x_3,x_4) + f([x_1,x_3],x_2,x_4) - \\
f([x_1,x_4],x_2,x_3) - f([x_2,x_3],x_1,x_4) + f([x_2,x_4],x_1,x_3) - f([x_3,x_4],x_1,x_2)
\end{gathered}
$$

У нашому випадку алгебра Лі -- 6-вимірний лінійний простір із базисом a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 ; а тому простори $H^2(K)$ і $H^3(K)$ будуть 15 і 20-вимірними відповідно. Базисом у ньому будуть індикаторні функції, що дорівнюють 1 на одній своїй парі для $H^2(K)$ або на трійці для $H^3(K)$. А тому знайти базис образу і ядру можна, розв'язавши систему лінійних рівняннь.

Розпишемо формулу вище у всіх точках. Спочатку для оператору d^3.

$$(d^2 f)(a_1,a_2,a_3) = f(a_2,a_3) - f(a_1,a_3) + f(a_1,a_2) - f([a_1,a_2],a_3) + f([a_1,a_3],a_2) - f([a_2,a_3],a_1) = \\ = f(a_2,a_3) - f(a_1,a_3) + f(a_1,a_2) - 0 + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_1,a_2,b_1) = f(a_2,b_1) - f(a_1,b_1) + f(a_1,a_2) - f([a_1,a_2],b_1) + f([a_1,b_1],a_2) - f([a_2,b_1],a_1) = \\ = f(a_2,b_1) - f(a_1,b_1) + f(a_1,a_2) - f(a_3,b_1) - f(a_2,b_2) + f(a_1,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_1,a_2,b_2) = f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_2) - f([a_1,a_2],b_2) + f([a_1,b_2],a_2) - f([a_2,b_2],a_1) = \\ = f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_2) - f(a_3,b_2) + f(a_2,b_1) - 0$$

$$(d^2 f)(a_1,a_2,b_3) = f(a_2,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,a_2) - f([a_1,a_2],b_3) + f([a_1,b_3],a_2) - f([a_2,b_3],a_1) = \\ = f(a_2,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,a_2) - f(a_3,b_3) + 0 - f(a_1,b_1)$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_1) = f(a_3,b_1) - f(a_1,b_1) + f(a_1,a_3) - f([a_1,a_3],b_1) + f([a_1,b_1],a_3) - f([a_3,b_1],a_1) = \\ = f(a_3,b_1) - f(a_1,b_1) + f(a_1,a_3) + f(a_2,b_1) - f(a_3,b_2) - 0$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_2) = f(a_3,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_3) - f([a_1,a_3],b_2) + f([a_1,b_2],a_3) - f([a_3,b_2],a_1) = \\ = f(a_3,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_3) + f(a_2,b_2) - f(a_3,b_3) + f(a_1,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_3) = f(a_3,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,a_3) - f([a_1,a_3],b_3) + f([a_1,b_3],a_3) - f([a_3,b_3],a_1) = \\ = f(a_3,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,a_3) + f(a_2,b_3) + 0 - f(a_1,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_1,b_1,b_2) = f(b_1,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,b_1) - f([a_1,b_1],b_2) + f([a_1,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_1) = \\ = f(b_1,b_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,b_1) - 0 + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_1,b_1,b_3) = f(b_1,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,b_1) - f([a_1,b_1],b_3) + f([a_1,b_3],b_1) -$$

$$- f([b_1,b_3],a_1) =$$
$$= f(b_1,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,b_1) - f(b_2,b_3) + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_1,b_2,b_3) = f(b_2,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,b_2) - f([a_1,b_2],b_3) + f([a_1,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_1) =$$
$$= f(b_2,b_3) - f(a_1,b_3) + f(a_1,b_2) + f(b_1,b_3) + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_1) = f(a_3,b_1) - f(a_2,b_1) + f(a_2,a_3) - f([a_2,a_3],b_1) + f([a_2,b_1],a_3) - f([a_3,b_1],a_2) =$$
$$= f(a_3,b_1) - f(a_2,b_1) + f(a_2,a_3) - f(a_1,b_1) - f(a_3,b_3) - 0$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_2) = f(a_3,b_2) - f(a_2,b_2) + f(a_2,a_3) - f([a_2,a_3],b_2) + f([a_2,b_2],a_3) - f([a_3,b_2],a_2) =$$
$$= f(a_3,b_2) - f(a_2,b_2) + f(a_2,a_3) - f(a_1,b_2) + 0 + f(a_2,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_3) = f(a_3,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,a_3) - f([a_2,a_3],b_3) + f([a_2,b_3],a_3) - f([a_3,b_3],a_2) =$$
$$= f(a_3,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,a_3) - f(a_1,b_3) + f(a_3,b_1) - f(a_2,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_2,b_1,b_2) = f(b_1,b_2) - f(a_2,b_2) + f(a_2,b_1) - f([a_2,b_1],b_2) + f([a_2,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_2) =$$
$$= f(b_1,b_2) - f(a_2,b_2) + f(a_2,b_1) + f(b_2,b_3) + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_2,b_1,b_3) = f(b_1,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,b_1) - f([a_2,b_1],b_3) + f([a_2,b_3],b_1) - f([b_1,b_3],a_2) =$$
$$= f(b_1,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,b_1) - 0 + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(a_2,b_2,b_3) = f(b_2,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,b_2) - f([a_2,b_2],b_3) + f([a_2,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_2) =$$
$$= f(b_2,b_3) - f(a_2,b_3) + f(a_2,b_2) - 0 + f(b_1,b_2) - 0$$

$$(d^2 f)(a_3,b_1,b_2) = f(b_1,b_2) - f(a_3,b_2) + f(a_3,b_1) - f([a_3,b_1],b_2) + f([a_3,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_3) =$$
$$= f(b_1,b_2) - f(a_3,b_2) + f(a_3,b_1) - 0 - f(b_1,b_3) - 0$$

$$(d^2 f)(a_3,b_1,b_3) = f(b_1,b_3) - f(a_3,b_3) + f(a_3,b_1) - f([a_3,b_1],b_3) + f([a_3,b_3],b_1) - f([b_1,b_3],a_3) =$$
$$= f(b_1,b_3) - f(a_3,b_3) + f(a_3,b_1) - 0 + f(b_1,b_2) - 0$$

$$(d^2 f)(a_3,b_2,b_3) = f(b_2,b_3) - f(a_3,b_3) + f(a_3,b_2) - f([a_3,b_2],b_3) + f([a_3,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_3) =$$
$$= f(b_2,b_3) - f(a_3,b_3) + f(a_3,b_2) - 0 + 0 - 0$$

$$(d^2 f)(b_1,b_2,b_3) = f(b_2,b_3) - f(b_1,b_3) + f(b_1,b_2) - f([b_1,b_2],b_3) + f([b_1,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],b_1) =$$
$$= f(b_2,b_3) - f(b_1,b_3) + f(b_1,b_2) - 0 + 0 - 0$$

Маючи цей вираз, легко записати матрицю цього оператора у вищезазначених базисах. Так, значення оператору від базисного елемента i_{a_2,b_3}, наприклад, дорівнює $i_{a_1,a_2,b_3} + i_{a_1,a_3,b_3} + i_{a_2,a_3,b_3} - i_{a_2,a_3,b_2}$. Тут i -- індикаторна функція, тобто, наприклад $i_{a_1,a_2,b_3}(x,y,z) = \begin{cases} 1, x = a_1 \vee y = a_2 \vee z = b_3 \\ 0, інакше \end{cases}$.

Аналогічно розпишемо оператор d^3:

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_1) = f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_1,a_2,b_1) - f(a_1,a_2,a_3) - f([a_1,a_2],a_3,b_1) +$$
$$+ f([a_1,a_3],a_2,b_1) - f([a_1,b_1],a_2,a_3) - f([a_2,a_3],a_1,b_1) + f([a_2,b_1],a_1,a_3) - f([a_3,b_1],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_1,a_2,b_1) - f(a_1,a_2,a_3) - 0 +$$
$$+ 0 - f(a_2,a_3,b_2) - 0 + f(b_3,a_1,a_3) - 0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_2) = f(a_2,a_3,b_2) - f(a_1,a_3,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,a_3) - f([a_1,a_2],a_3,b_2) +$$
$$+ f([a_1,a_3],a_2,b_2) - f([a_1,b_2],a_2,a_3) - f([a_2,a_3],a_1,b_2) + f([a_2,b_2],a_1,a_3) - f([a_3,b_2],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,a_3,b_2) - f(a_1,a_3,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,a_3) - 0 +$$
$$+ 0 + f(b_1,a_2,a_3) - 0 + 0 - f(b_3,a_1,a_2)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_3) = f(a_2,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,a_3) - f([a_1,a_2],a_3,b_3) +$$
$$+ f([a_1,a_3],a_2,b_3) - f([a_1,b_3],a_2,a_3) - f([a_2,a_3],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,a_3) - f([a_3,b_3],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,a_3) - 0 +$$
$$+ 0 - 0 - 0 - f(b_1,a_1,a_3) + f(b_2,a_1,a_2)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_2) = f(a_2,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,b_1) - f([a_1,a_2],b_1,b_2) +$$
$$+ f([a_1,b_1],a_2,b_2) - f([a_1,b_2],a_2,b_1) - f([a_2,b_1],a_1,b_2) + f([a_2,b_2],a_1,b_1) - f([b_1,b_2],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,b_1) - f(a_3,b_1,b_2) +$$
$$+ 0 - 0 - f(b_3,a_1,b_2) + 0 - 0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_3) = f(a_2,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,b_1) - f([a_1,a_2],b_1,b_3) +$$
$$+ f([a_1,b_1],a_2,b_3) - f([a_1,b_3],a_2,b_1) - f([a_2,b_1],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,b_1) - f([b_1,b_3],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,b_1) - f(a_3,b_1,b_3) +$$
$$+ f(b_2,a_2,b_3) - 0 - 0 + 0 - 0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_2,b_3) = f(a_2,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,b_2) - f([a_1,a_2],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_1,b_2],a_2,b_3) - f([a_1,b_3],a_2,b_2) - f([a_2,b_2],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,b_2) - f([b_2,b_3],a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,b_2) - f(a_3,b_2,b_3) -$$
$$- f(b_1,a_2,b_3) - 0 - 0 - f(b_1,a_1,b_2) - 0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_2) = f(a_3,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_3,b_2) - f(a_1,a_3,b_1) - f([a_1,a_3],b_1,b_2) +$$
$$+ f([a_1,b_1],a_3,b_2) - f([a_1,b_2],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_1,b_2) + f([a_3,b_2],a_1,b_1) - f([b_1,b_2],a_1,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_3,b_2) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_2,b_1,b_2) +$$
$$+0-0-0+f(b_3,a_1,b_1)-0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_3) = f(a_3,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_1) - f([a_1,a_3],b_1,b_3) +$$
$$+ f([a_1,b_1],a_3,b_3) - f([a_1,b_3],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_1,b_3) + f([a_3,b_3],a_1,b_1) - f([b_1,b_3],a_1,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_2,b_1,b_2) +$$
$$+ f(b_2,a_3,b_3)-0-0-f(b_2,a_1,b_1)-0$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_2,b_3) = f(a_3,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_2) - f([a_1,a_3],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_1,b_2],a_3,b_3) - f([a_1,b_3],a_3,b_2) - f([a_3,b_2],a_1,b_3) + f([a_3,b_3],a_1,b_2) - f([b_2,b_3],a_1,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_2) + f(a_2,b_2,b_3) -$$
$$- f(b_1,a_3,b_3)-0-0+0-0$$

$$(d^3 f)(a_1,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_2) - f([a_1,b_1],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_1,b_2],b_1,b_3) - f([a_1,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_1,b_3) + f([b_1,b_3],a_1,b_2) - f([b_2,b_3],a_1,b_1) =$$
$$= f(b_1,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_2) - 0 +$$
$$+0-0-0+0-0$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_2) = f(a_3,b_1,b_2) - f(a_2,b_1,b_2) + f(a_2,a_3,b_2) - f(a_2,a_3,b_1) - f([a_2,a_3],b_1,b_2) +$$
$$+ f([a_2,b_1],a_3,b_2) - f([a_2,b_2],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_2,b_2) + f([a_3,b_2],a_2,b_1) - f([b_1,b_2],a_2,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_1,b_2) - f(a_2,b_1,b_2) + f(a_2,a_3,b_2) - f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,b_1,b_2) +$$
$$+ f(b_3,a_3,b_2)-0-0+f(b_3,a_2,b_1)-0$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_3) = f(a_3,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_1) - f([a_2,a_3],b_1,b_3) +$$
$$+ f([a_2,b_1],a_3,b_3) - f([a_2,b_3],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_2,b_3) + f([a_3,b_3],a_2,b_1) - f([b_1,b_3],a_2,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,b_1,b_3) +$$
$$+0-0-0-f(b_2,a_2,b_1)-0$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_2,b_3) = f(a_3,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_2) - f([a_2,a_3],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_2,b_2],a_3,b_3) - f([a_2,b_3],a_3,b_2) - f([a_3,b_2],a_2,b_3) + f([a_3,b_3],a_2,b_2) - f([b_2,b_3],a_2,a_3) =$$
$$= f(a_3,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_2) - f(a_1,b_2,b_3) +$$
$$+0+f(b_1,a_3,b_2)-0-0-0$$

$$(d^3 f)(a_2,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_2) - f([a_2,b_1],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_2,b_2],b_1,b_3) - f([a_2,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_2,b_3) + f([b_1,b_3],a_2,b_2) - f([b_2,b_3],a_2,b_1) =$$
$$= f(b_1,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_2) - 0 +$$
$$+0-0-0+0-0$$

$$(d^3 f)(a_3,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_3,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_3) - f(a_3,b_1,b_2) - f([a_3,b_1],b_2,b_3) +$$
$$+ f([a_3,b_2],b_1,b_3) - f([a_3,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_3,b_3) + f([b_1,b_3],a_3,b_2) - f([b_2,b_3],a_3,b_1) =$$
$$= f(b_1,b_2,b_3) - f(a_3,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_3) - f(a_3,b_1,b_2) - 0 +$$
$$+0-0-0+0-0$$

Прибравши нулі із виразів, а також звівши всі аргументи до єдиного порядку за рахунок кососимметричності цих функцій, отримаємо остаточні вирази:

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_1) = f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_1,a_2,b_1) - f(a_1,a_2,a_3) - f(a_2,a_3,b_2) + f(a_1,a_3,b_3)$$
$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_2) = f(a_2,a_3,b_2) - f(a_1,a_3,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,a_3) + f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,a_2,b_3)$$
$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_3) = f(a_2,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,a_3) - f(a_1,a_3,b_1) + f(a_1,a_2,b_2)$$
$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_2) = f(a_2,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_2,b_2) - f(a_1,a_2,b_1) - f(a_3,b_1,b_2) - f(a_1,b_2,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_3) = f(a_2,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_2,b_3) - f(a_1,a_2,b_1) - f(a_3,b_1,b_3) - f(a_2,b_2,b_3)$$
$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_2,b_3) = f(a_2,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_2,b_3)$$
$$- f(a_1,a_2,b_2) - f(a_3,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3) + f(a_1,b_1,b_2)$$
$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_2) = f(a_3,b_1,b_2) - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_1,a_3,b_2)$$
$$- f(a_1,a_3,b_1) + f(a_2,b_1,b_2) + f(a_1,b_1,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_3) = f(a_3,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_3) + f(a_1,a_3,b_3)$$
$$- f(a_1,a_3,b_1) + f(a_2,b_1,b_2) - f(a_3,b_2,b_3) - f(a_1,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_2,b_3) = f(a_3,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,a_3,b_3) - f(a_1,a_3,b_2) + f(a_2,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_1,b_1,b_3) - f(a_1,b_1,b_2)$$

$$\begin{aligned}(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_2) = {} & f(a_3,b_1,b_2) - f(a_2,b_1,b_2) + f(a_2,a_3,b_2) - f(a_2,a_3,b_1) \\ & - f(a_1,b_1,b_2) + f(a_3,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3)\end{aligned}$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_3) = f(a_3,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_2,b_3) = f(a_3,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,a_3,b_3) - f(a_2,a_3,b_2) - f(a_1,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_2,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_2,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_3,b_1,b_2,b_3) = f(b_1,b_2,b_3) - f(a_3,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_3) - f(a_3,b_1,b_2)$$

Використовуючи правильні формули, ми отримуємо кращі результати.

$$\begin{aligned}(d^2 f)(a_1,a_2,a_3) &= -f([a_1,a_2],a_3) + f([a_1,a_3],a_2) - f([a_2,a_3],a_1) = \\ &= -f(a_3,a_3) + f(-a_2,a_2) - f(a_1,a_1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d^2 f)(a_1,a_2,b_1) &= -f([a_1,a_2],b_1) + f([a_1,b_1],a_2) - f([a_2,b_1],a_1) = \\ &= -f(a_3,b_1) + f(b_2,a_2) - f(b_3,a_1) = -f(a_3,b_1) - f(a_2,b_2) + f(a_1,b_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d^2 f)(a_1,a_2,b_2) &= -f([a_1,a_2],b_2) + f([a_1,b_2],a_2) - f([a_2,b_2],a_1) = \\ &= -f(a_3,b_2) + f(-b_1,a_2) - f(0,a_1) = -f(a_3,b_2) + f(a_2,b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d^2 f)(a_1,a_2,b_3) &= -f([a_1,a_2],b_3) + f([a_1,b_3],a_2) - f([a_2,b_3],a_1) = \\ &= -f(a_3,b_3) + f(0,a_2) - f(-b_1,a_1) = -f(a_3,b_3) - f(a_1,b_1)\end{aligned}$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_1) = -f([a_1,a_3],b_1) + f([a_1,b_1],a_3) - f([a_3,b_1],a_1) =$$
$$= -f(-a_2,b_1) + f(b_2,a_3) - f(0,a_1) = f(a_2,b_1) - f(a_3,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_2) = -f([a_1,a_3],b_2) + f([a_1,b_2],a_3) - f([a_3,b_2],a_1) =$$
$$= -f(-a_2,b_2) + f(-b_1,a_3) - f(b_3,a_1) = f(a_2,b_2) + f(a_3,b_1) + f(a_1,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_1,a_3,b_3) = -f([a_1,a_3],b_3) + f([a_1,b_3],a_3) - f([a_3,b_3],a_1) =$$
$$= -f(-a_2,b_3) + f(0,a_3) - f(-b_2,a_1) = f(a_2,b_3) - f(a_1,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_1,b_1,b_2) = -f([a_1,b_1],b_2) + f([a_1,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_1) =$$
$$= -f(b_2,b_2) + f(-b_1,b_1) - f(0,a_1) = 0$$

$$(d^2 f)(a_1,b_1,b_3) = -f([a_1,b_1],b_3) + f([a_1,b_3],b_1) - f([b_1,b_3],a_1) =$$
$$= -f(b_2,b_3) + f(0,b_1) - f(0,a_1) = -f(b_2,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_1,b_2,b_3) = -f([a_1,b_2],b_3) + f([a_1,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_1) =$$
$$= -f(-b_1,b_3) + f(0,b_2) - f(0,a_1) = f(b_1,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_1) = -f([a_2,a_3],b_1) + f([a_2,b_1],a_3) - f([a_3,b_1],a_2) =$$
$$= -f(a_1,b_1) + f(b_3,a_3) - f(0,a_2) = -f(a_1,b_1) - f(a_3,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_2) = -f([a_2,a_3],b_2) + f([a_2,b_2],a_3) - f([a_3,b_2],a_2) =$$
$$= -f(a_1,b_2) + f(0,a_3) - f(b_3,a_2) = -f(a_1,b_2) + f(a_2,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_2,a_3,b_3) = -f([a_2,a_3],b_3) + f([a_2,b_3],a_3) - f([a_3,b_3],a_2) =$$
$$= -f(a_1,b_3) + f(-b_1,a_3) - f(-b_2,a_2) = -f(a_1,b_3) + f(a_3,b_1) - f(a_2,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_2,b_1,b_2) = -f([a_2,b_1],b_2) + f([a_2,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_2) =$$
$$= -f(b_3,b_2) + f(0,b_1) - f(0,a_2) = f(b_2,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_2,b_1,b_3) = -f([a_2,b_1],b_3) + f([a_2,b_3],b_1) - f([b_1,b_3],a_2) =$$
$$= -f(b_3,b_3) + f(-b_1,b_1) - f(0,a_2) = 0$$

$$(d^2 f)(a_2,b_2,b_3) = -f([a_2,b_2],b_3) + f([a_2,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_2) =$$
$$= -f(0,b_3) + f(-b_1,b_2) - f(0,a_2) = -f(b_1,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_3,b_1,b_2) = f([a_3,b_1],b_2) + f([a_3,b_2],b_1) - f([b_1,b_2],a_3) =$$
$$= f(0,b_2) + f(b_3,b_1) - f(0,a_3) = -f(b_1,b_3)$$

$$(d^2 f)(a_3,b_1,b_3) = f([a_3,b_1],b_3) + f([a_3,b_3],b_1) - f([b_1,b_3],a_3) =$$
$$= f(0,b_3) + f(-b_2,b_1) - f(0,a_3) = f(b_1,b_2)$$

$$(d^2 f)(a_3,b_2,b_3) = f([a_3,b_2],b_3) + f([a_3,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],a_3) =$$
$$= f(b_3,b_3) + f(-b_2,b_2) - f(0,a_3) = 0$$

$$(d^2 f)(b_1,b_2,b_3) = f([b_1,b_2],b_3) + f([b_1,b_3],b_2) - f([b_2,b_3],b_1) =$$
$$= f(0,b_3) + f(0,b_2) - f(0,b_1) = 0$$

Аналогічно для 3-коциклів маємо:

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_1) = -f([a_1,a_2],a_3,b_1) + f([a_1,a_3],a_2,b_1) - f([a_1,b_1],a_2,a_3)$$
$$- f([a_2,a_3],a_1,b_1) + f([a_2,b_1],a_1,a_3) -$$
$$- f([a_3,b_1],a_1,a_2) = -f(a_3,a_3,b_1) + f(-a_2,a_2,b_1)$$
$$- f(b_2,a_2,a_3) - f(a_1,a_1,b_1) + f(b_3,a_1,a_3) - f(0,a_1,a_2) =$$
$$= -f(a_2,a_3,b_2) + f(a_1,a_3,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_2) = -f([a_1,a_2],a_3,b_2) + f([a_1,a_3],a_2,b_2)$$
$$- f([a_1,b_2],a_2,a_3) - f([a_2,a_3],a_1,b_2) + f([a_2,b_2],a_1,a_3) -$$
$$- f([a_3,b_2],a_1,a_2) = -f(a_3,a_3,b_2) + f(-a_2,a_2,b_2)$$
$$- f(-b_1,a_2,a_3) - f(a_1,a_1,b_2) + f(0,a_1,a_3) - f(b_3,a_1,a_2) =$$
$$= f(a_2,a_3,b_1) - f(a_1,a_2,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,a_3,b_3) = -f([a_1,a_2],a_3,b_3) + f([a_1,a_3],a_2,b_3) - f([a_1,b_3],a_2,a_3) -$$
$$- f([a_2,a_3],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,a_3) -$$
$$- f([a_3,b_3],a_1,a_2) = -f(a_3,a_3,b_3) + f(-a_2,a_2,b_3) -$$
$$- f(0,a_2,a_3) - f(a_1,a_1,b_3) + f(-b_1,a_1,a_3) - f(-b_2,a_1,a_2) =$$
$$= -f(a_1,a_3,b_1) + f(a_1,a_2,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_2) = -f([a_1,a_2],b_1,b_2) + f([a_1,b_1],a_2,b_2) -$$
$$- f([a_1,b_2],a_2,b_1) - f([a_2,b_1],a_1,b_2) + f([a_2,b_2],a_1,b_1) -$$
$$- f([b_1,b_2],a_1,a_2) - f(a_3,b_1,b_2) + f(b_2,a_2,b_2) -$$
$$- f(-b_1,a_2,b_1) - f(b_3,a_1,b_2) + f(0,a_1,b_1) - f(0,a_1,a_2) =$$
$$= -f(a_3,b_1,b_2) - f(a_1,b_2,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_1,b_3) = -f([a_1,a_2],b_1,b_3) + f([a_1,b_1],a_2,b_3) - f([a_1,b_3],a_2,b_1) -$$
$$- f([a_2,b_1],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,b_1) -$$
$$- f([b_1,b_3],a_1,a_2) - f(a_3,b_1,b_3) + f(b_2,a_2,b_3) -$$
$$- f(0,a_2,b_1) - f(b_3,a_1,b_3) + f(-b_1,a_1,b_1) - f(0,a_1,a_2) =$$
$$= -f(a_3,b_1,b_3) - f(a_2,b_2,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_2,b_2,b_3) = -f([a_1,a_2],b_2,b_3) + f([a_1,b_2],a_2,b_3)$$
$$- f([a_1,b_3],a_2,b_2) - f([a_2,b_2],a_1,b_3) + f([a_2,b_3],a_1,b_2) -$$
$$- f([b_2,b_3],a_1,a_2) - f(a_3,b_2,b_3) + f(-b_1,a_2,b_3) -$$
$$- f(0,a_2,b_2) - f(0,a_1,b_3) + f(-b_1,a_1,b_2) - f(0,a_1,a_2) =$$
$$= -f(a_3,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3) + f(a_1,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_2) = -f([a_1,a_3],b_1,b_2) + f([a_1,b_1],a_3,b_2) -$$
$$f([a_1,b_2],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_1,b_2) + f([a_3,b_2],a_1,b_1) -$$
$$- f([b_1,b_2],a_1,a_3) - f(-a_2,b_1,b_2) + f(b_2,a_3,b_2) - f(-b_1,a_3,b_1) -$$
$$f(0,a_1,b_2) + f(b_3,a_1,b_1) - f(0,a_1,a_3) =$$
$$= f(a_2,b_1,b_2) + f(a_1,b_1,b_3)$$

$$(d^3 f)(a_1,a_3,b_1,b_3) = -f([a_1,a_3],b_1,b_3) + f([a_1,b_1],a_3,b_3) -$$
$$f([a_1,b_3],a_3,b_1) - f([a_3,b_1],a_1,b_3) + f([a_3,b_3],a_1,b_1) -$$
$$- f([b_1,b_3],a_1,a_3) - f(-a_2,b_1,b_3) + f(b_2,a_3,b_3) -$$
$$- f(0,a_3,b_1) - f(0,a_1,b_3) + f(-b_2,a_1,b_1) - f(0,a_1,a_3) =$$
$$= f(a_2,b_1,b_3) - f(a_3,b_2,b_3) - f(a_1,b_1,b_2)$$

$$
\begin{gathered}
(d^3 f)(a_1,a_3,b_2,b_3) = -f([a_1,a_3],b_2,b_3) + f([a_1,b_2],a_3,b_3) - \\
- f([a_1,b_3],a_3,b_2) - f([a_3,b_2],a_1,b_3) + f([a_3,b_3],a_1,b_2) - \\
- f([b_2,b_3],a_1,a_3) - f(-a_2,b_2,b_3) + f(-b_1,a_3,b_3) - \\
- f(0,a_3,b_2) - f(b_3,a_1,b_3) + f(-b_2,a_1,b_2) - f(0,a_1,a_3) = \\
= f(a_2,b_2,b_3) + f(a_3,b_1,b_3)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(d^3 f)(a_1,b_1,b_2,b_3) = -f([a_1,b_1],b_2,b_3) + f([a_1,b_2],b_1,b_3) - \\
- f([a_1,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_1,b_3) + f([b_1,b_3],a_1,b_2) - \\
- f([b_2,b_3],a_1,b_1) = -f(b_2,b_2,b_3) + f(-b_1,b_1,b_3) - \\
- f(0,b_1,b_2) - f(0,a_1,b_3)\,{}_f(0,a_1,b_2) - f(0,a_1,b_1) = \\
= 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_2) = -f([a_2,a_3],b_1,b_2) + f([a_2,b_1],a_3,b_2) - f([a_2,b_2],a_3,b_1) - \\
- f([a_3,b_1],a_2,b_2) + f([a_3,b_2],a_2,b_1) - \\
- f([b_1,b_2],a_2,a_3) = -f(a_1,b_1,b_2) + f(b_3,a_3,b_2) - f(0,a_3,b_1) - \\
- f(0,a_2,b_2) + f(b_3,a_2,b_1) - f(0,a_2,a_3) = \\
= -f(a_1,b_1,b_2) + f(a_3,b_2,b_3) + f(a_2,b_1,b_3)
\end{gathered}
$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_1,b_3) = -f([a_2,a_3],b_1,b_3) + f([a_2,b_1],a_3,b_3) - f([a_2,b_3],a_3,b_1) -$$
$$- f([a_3,b_1],a_2,b_3) + f([a_3,b_3],a_2,b_1) -$$
$$- f([b_1,b_3],a_2,a_3) = -f(a_1,b_1,b_3) + f(b_3,a_3,b_3) - f(-b_1,a_3,b_1) -$$
$$- f(0,a_2,b_3) + f(-b_2,a_2,b_1) - f(0,a_2,a_3) =$$
$$= -f(a_1,b_1,b_3) - f(a_2,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_2,a_3,b_2,b_3) = f([a_2,a_3],b_2,b_3) + f([a_2,b_2],a_3,b_3) - f([a_2,b_3],a_3,b_2) -$$
$$- f([a_3,b_2],a_2,b_3) + f([a_3,b_3],a_2,b_2) -$$
$$- f([b_2,b_3],a_2,a_3) = f(a_1,b_2,b_3) + f(0,a_3,b_3) - f(-b_1,a_3,b_2) -$$
$$- f(b_3,a_2,b_3) + f(-b_2,a_2,b_2) - f(0,a_2,a_3) =$$
$$= f(a_1,b_2,b_3) - f(a_3,b_1,b_2)$$

$$(d^3 f)(a_2,b_1,b_2,b_3) = f([a_2,b_1],b_2,b_3) + f([a_2,b_2],b_1,b_3) -$$
$$- f([a_2,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_2,b_3) + f([b_1,b_3],a_2,b_2) -$$
$$- f([b_2,b_3],a_2,b_1) = f(b_3,b_2,b_3) + f(0,b_1,b_3) -$$
$$- f(-b_1,b_1,b_2) - f(0,a_2,b_3) + f(0,a_2,b_2) - f(0,a_2,b_1) =$$
$$= 0$$

$$(d^3 f)(a_3,b_1,b_2,b_3) = f([a_3,b_1],b_2,b_3) + f([a_3,b_2],b_1,b_3) -$$
$$- f([a_3,b_3],b_1,b_2) - f([b_1,b_2],a_3,b_3) + f([b_1,b_3],a_3,b_2) -$$
$$- f([b_2,b_3],a_3,b_1) = f(0,b_2,b_3) + f(b_3,b_1,b_3) -$$
$$- f(-b_2,b_1,b_2) - f(0,a_3,b_3) + f(0,a_3,b_2) - f(0,a_3,b_1) =$$
$$= 0$$

За допомогою цих формул ми можемо записати матрицю операторів d^3 і d^2 у вищезазначених базисах.

$$A_{d^3} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

$$A_{d^2} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Маючи ці матриці, ми можемо напряму у векторній формі знайти ядро опреатору d^3 і образ оператору d^2. У векторній формі ці простори матимуть вигляд лінійної оболонки наступних векторів:

$$Ker\ d^3 = L\left(\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)$$

$$Im\,d^2 = L\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Легко побачити, що у фактор-просторі $Ker\,d^3 \setminus Im\,d^2$ базисом будуть $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$ та $b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$

2.4 2-когомології

Для конструкції нам також необхідні 2-когомології $H^2(\mathfrak{g})$ і $H^2(\mathfrak{h})$. Їх побудова суттєво простіша, оскільки розмірність алгебр $dim\,\mathfrak{g} = dim\,\mathfrak{g} = 3$, а тому базисних функціоналів у відповідних просторах буде всього 3. Оскільки $H^2(\mathfrak{g}) = Ker\,d^2 \setminus Im\,d^1$, то нам необхідні оператори d^2 і d^1 на алгебрах $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$.

Розпишемо їх аналогічним чином до попереднього. Спочатку оператор d_1:

$$d^1 f(b_1, b_2) = f([b_1, b_2]) = 0$$
$$d^1 f(b_1, b_3) = f([b_1, b_3]) = 0$$
$$d^1 f(b_2, b_3) = f([b_2, b_3]) = 0$$

$$d^1 f(a_1, a_2) = f([a_1, a_2]) = f(a_3)$$
$$d^1 f(a_1, a_3) = f([a_1, a_3]) = -f(a_2)$$
$$d^1 f(a_2, a_3) = f([a_2, a_3]) = f(a_1)$$

Легко побачити, що $dim\, Im\, d^1 |_G = 0$; $dim\, Im\, d^1 |_H = 3$, і базисом у $dim\, Im\, d^1 |_H$ будуть усі 3 функціонали - $a_1 \vee a_2$, $a_1 \vee a_3$ і $a_2 \vee a_3$.

Тепер розпишемо d^2:

$$d^2 f(a_1, a_2, a_3) = f([a_1, a_2], a_3) + f([a_2, a_3], a_1) - f([a_1, a_3], a_2) = f(a_3, a_3) + f(a_1, a_1) - f(a_2, a_2) = 0$$
$$d^2 f(b_1, b_2, b_3) = f([b_1, b_2], b_3) + f([b_2, b_3], b_1) - f([b_1, b_3], b_2) = 0 + 0 - 0.$$

Звідки одразу обидва оператори тотожньо нульові, а тому базисом у ядрі $Ker\, d^2$ будуть усі функціонали.

Беручи фактор образу по ядру, легко побачити, що базис у когомологіях утворюють класи еквівалентності лише функціоналів $b_1 \vee b_2$, $b_2 \vee b_3$ і $b_1 \vee b_3$.

2.5 Інтегрування отриманих коциклів

За запропонованою схемою, наступним кроком буде перенесення отриманих коциклів із групи когомологій на алгебрах Лі $H(\mathrm{k})^3$ та $H(\mathrm{m})^2 \oplus H(\mathrm{n})^2$ на групи когомолій на відповідних групах Лі $H(K)^3$ і $H(M)^2 \oplus H(N)^2$. Для цього, як було описано вище, необхідно записати відповідну диференційну форму на групі Лі, а далі проінтегрувати по стандратному симлексу. Спочатку інтегруємо отримані 3-коцикли. У цьому разі розглядаємо стандартний симлекс у просторі R^3, що задається $\Delta^3 = \{0 \le t_1 + t_2 + t_3 \le 1, 0 \le t_i \le 1\}$, і за допомогою відображення

$$\gamma_t(k) = t \cdot k + (1-t) \cdot e$$

Переносимо цей симлекс із арифметичного простору у групу Лі за допомогою наступної формули.

$$\sigma(k_1, k_2, k_3) = \gamma_{s_1}(k_1 \cdot \gamma_{s_2}(k_2 \cdot \gamma_{s_3}(k_3)))$$

де s_1, s_2, s_3 -- це наступне перетворення координат

$$\begin{aligned} s_1(t_1, t_2, t_3) &= t_1 \\ s_2(t_1, t_2, t_3) &= \frac{t_2}{1-t_1} \\ s_3(t_1, t_2, t_3) &= \frac{t_3}{1-t_1-t_2} \end{aligned}$$

Таким чином, 3-коцикл на групі Лі, що відповідає знайденим 3-коциклам на алгебрі Лі буде мати вигляд

$$f(k_1,k_2,k_3)=\int\limits_{\sigma(k_1,k_2,k_3)}\omega$$

де ω -- це диференційна форма, що відповідає знайденому 3-коциклу.

У нашому випакду є 2 3-коцикли $a_1\wedge a_2\wedge a_3$ та $b_1\wedge b_2\wedge b_3$, яким відповідають наступні диференційні форми:

$$\omega_1=da_1\wedge da_2\wedge da_3;\quad \omega_2=db_1\wedge db_2\wedge db_3$$

Розпишемо формулу для симплексу

$$\begin{aligned}
&\sigma(k_1,k_2,k_3)=\gamma_{s_1}(k_1\cdot\gamma_{s_2}(k_2\cdot\gamma_{s_3}(k_3)))=\gamma_{s_1}(k_1\cdot\gamma_{s_2}(k_2\cdot(s_3\cdot k_3+(1-s_3)\cdot e))=\\
&=\gamma_{s_1}(k_1\cdot(s_3\cdot\gamma_{s_2}(k_2k_3)+(1-s_3)\cdot\gamma_{s_2}(k_2)))=\gamma_{s_1}(k_1\cdot((s_2s_3\cdot k_2k_3+(1-s_2)s_3e)+\\
&+(s_2(1-s_3)\cdot k_2)+(1-s_2)(1-s_3)e))=s_2s_3\cdot\gamma_{s_1}(k_1k_2k_3)+(1-s_2)s_3\cdot\gamma_{s_1}(k_1)+\\
&+s_2(1-s_3)\cdot\gamma_{s_1}(k_1k_2)+(1-s_2)(1-s_3)\gamma_{s_1}(k_1)=s_1s_2s_3\cdot k_1k_2k_3+(1-s_1)s_2s_3\cdot e+\\
&+s_1(1-s_2)s_3\cdot k_1+(1-s_1)(1-s_2)s_3\cdot e+s_1s_2(1-s_3)\cdot k_1k_2+(1-s_1)s_2(1-s_3)\cdot e+\\
&+s_1(1-s_2)(1-s_3)\cdot k_1+(1-s_1)(1-s_2)(1-s_3)\cdot e=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=s_1s_2s_3\cdot k_1k_2k_3+s_1s_2(1-s_3)k_1k_2+s_1(1-s_2)k_1+\\
&+((1-s_1)s_2s_3+(1-s_1)(1-s_2)s_3+(1-s_1)s_2(1-s_3)+(1-s_1)(1-s_2)(1-s_3))e
\end{aligned}$$

Продифференцієюємо цей вираз по s_1,s_2,s_3 та знайдемо його значення у точці $(1,1,1)$.

$$[]\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}(s_1,s_2,s_3)s_1=1,s_2=1,s_3=1=k_1k_2k_3$$

$$[]\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}(s_1,s_2,s_3)s_1=1,s_2=1,s_3=1=k_1k_2k_3-k_1$$

$$[]\frac{\partial\sigma}{\partial s_3}(s_1,s_2,s_3)s_1=1,s_2=1,s_3=1=k_1k_2k_3-k_1k_2$$

Користуючись матричним представленням групи, запишемо елементи k_1, k_2, k_3 у матричному вигляді. Нам необхідно буде представлення у вигляді добутку трьох однопараметричних представлень, а тому записуємо елементи у наступному вигляді.

$$k_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1)\cos(\theta_1) & \begin{matrix}\cos(\psi_1)\sin(\phi_1)- \\ \cos(\phi_1)\sin(\theta_1)\sin(\psi_1)\end{matrix} & \begin{matrix}\cos(\phi_1)\cos(\psi_1)\sin(\theta_1)+ \\ \sin(\phi_1)\sin(\psi_1)\end{matrix} & x_1 \\ -\cos(\theta_1)\sin(\phi_1) & \begin{matrix}\cos(\phi_1)\cos(\psi_1)+ \\ \sin(\phi_1)\sin(\theta_1)\sin(\psi_1)\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos(\psi_1)\sin(\phi_1)\sin(\theta_1)+ \\ \cos(\phi_1)\sin(\psi_1)\end{matrix} & y_1 \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1)\sin(\psi_1) & \cos(\theta_1)\cos(\psi_1) & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2)\cos(\theta_2) & \begin{matrix}\cos(\psi_2)\sin(\phi_2)- \\ \cos(\phi_2)\sin(\theta_2)\sin(\psi_2)\end{matrix} & \begin{matrix}\cos(\phi_2)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2)+ \\ \sin(\phi_2)\sin(\psi_2)\end{matrix} & x_2 \\ -\cos(\theta_2)\sin(\phi_2) & \begin{matrix}\cos(\phi_2)\cos(\psi_2)+ \\ \sin(\phi_2)\sin(\theta_2)\sin(\psi_2)\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos(\psi_2)\sin(\phi_2)\sin(\theta_2)+ \\ \cos(\phi_2)\sin(\psi_2)\end{matrix} & y_2 \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2)\sin(\psi_2) & \cos(\theta_2)\cos(\psi_2) & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_3)\cos(\theta_3) & \begin{matrix}\cos(\psi_3)\sin(\phi_3)- \\ \cos(\phi_3)\sin(\theta_3)\sin(\psi_3)\end{matrix} & \begin{matrix}\cos(\phi_3)\cos(\psi_3)\sin(\theta_3)+ \\ \sin(\phi_3)\sin(\psi_3)\end{matrix} & x_3 \\ -\cos(\theta_3)\sin(\phi_3) & \begin{matrix}\cos(\phi_3)\cos(\psi_3)+ \\ \sin(\phi_3)\sin(\theta_3)\sin(\psi_3)\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos(\psi_3)\sin(\phi_3)\sin(\theta_3)+ \\ \cos(\phi_3)\sin(\psi_3)\end{matrix} & y_3 \\ -\sin(\theta_3) & -\cos(\theta_3)\sin(\psi_3) & \cos(\theta_3)\cos(\psi_3) & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можна показати, що в результаті інтегрування отримані 3-коцикли будуть мати вигляд

$$f_1(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}a_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}a_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}a_3 \\ []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}a_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}a_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}a_3 \\ []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}a_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}a_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}a_3 \end{vmatrix}$$

$$f_2(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_3 \\ []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_3 \\ []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}b_1 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}b_2 & []\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}b_3 \end{vmatrix}$$

Оскільки $H^3(G)\oplus H^3(H)=0$, то будь-який функціонал із $H^3(K)$ автоматично лежить у $Ker\pi^3$. А тому, можемо вибрати функціонали $\psi_G=\psi_H\equiv 0$.

Варто зазначити, що функціонал f_1 не залежить від жодного параметру групи G, а тому його звуження, що знадобиться на подальших кроках, буде рівне 0. Тому, у бодальших розрахунках будемо розглядати лише функціонал f_2.

Тепер застосуємо відображення τ до отриманого функціоналу f_2 ($k_i=g_i\cdot h_i$):.

$$\tau(f_2)(k_1,k_2,k_3)=f_2(h_1\triangleleft g_2,h_2,g_3)+f_2(h_1,g_2,h_2\triangleright g_3)+f_2((h_1\triangleleft g_2)h_2\triangleright g_3,h_1\triangleleft g_2(h_2\triangleright g_3),h_2\triangleleft g_3)+$$
$$+f(h_1\triangleright g_2,(h_1\triangleleft g_2)h_2\triangleright g_3,h_1\triangleleft g_2(h_2\triangleright g_3))-f_2(h_1\triangleright g_2,h_1\triangleleft g_2,h_2\triangleright g_3)-f_2(h_1\triangleleft g_2,h_2\triangleright g_3,h_2\triangleleft g_3)$$

Враховуючи, що у нашій групі $\triangleleft\equiv id$, формула спрощується і має вигляд:

$$\tau(f_2)(k_1,k_2,k_3)=f_2(h_1,h_2,g_3)+f_2(h_1,g_2,h_2\triangleright g_3)+f_2(h_1h_2\triangleright g_3,g_1,h_2)+f_2(h_1\triangleright g_2,h_1h_2\triangleright g_3,h_1)-$$
$$-f_2(h_1\triangleright g_2,h_1,h_2\triangleright g_3)-f_2(h_1,h_2\triangleright g_3,h_2)$$

Із отриманого функціоналу 3-коцикли u,v , що необхідні для побудови коциклічної дії у конструкції подвійного добутку, знаходяться шляхом підстановки одиниці e замість елементів h_1, g_2, g_3 для коциклу u і h_1, h_2, g_3 для коциклу v. Після підстановки маємо (враховуючи, що дія нейтрального елементу завжди тотожня, а також нейтральний елемент завжди залишається ней):

$$
\begin{aligned}
u(g_1, g_2, h_3) = \tau(f_2)(g_1 \cdot e, g_2 \cdot e, e \cdot h_3) = f_2(e,e,e) + f_2(e, g_2, g_3) + f_2(e, g_1, e) + \\
+ f_2(g_2, e, e) - f_2(g_2, e, e) - f_2(e,e,e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(g_1, h_2, h_3) = \tau(f_2)(g_1 \cdot e, e \cdot h_2, e \cdot h_3) = f_2(e, h_2, e) + f_2(e, e, h_2 \triangleright e) + f_2(h_2 \triangleright e, g_1, h_2) + \\
+ f_2(e, h_2 \triangleright e, h_1) - f_2(e \triangleright e, e, h_2, \triangleright e) - f_2(h_1, e \triangleright e, e)
\end{aligned}
$$

Отже, отримана група $Im\tau^*$.

Тепер переходимо до інтегрування отриманого 2-коциклу. Знайденим 2-коциклам відповідають наступні диференційні 2-форми:

$$
\omega_1 = db_1 \wedge db_2; \quad \omega_2 = db_1 \wedge db_3; \quad \omega_3 = db_2 \wedge db_3;
$$

Їх інтеграл має вигляд:

$$
f_i(k_1, k_2) = \int_{\sigma(k_1, k_2)} \omega_i
$$

Параметризація 2-симлекса має аналогічний до попереднього вигляд. Після розкриття усіх дужок, отримаємо:

$$\sigma(k_1,k_2)=\gamma_{s_1}(k_1\cdot\gamma_{s_2}(k_2)))=\gamma_{s_1}(k_1\cdot(s_2\cdot k_2+(1-s_2)\cdot e))=$$
$$=s_2\cdot\gamma_{s_1}(k_1k_2)+(1-s_2)\cdot\gamma_{s_1}(k_1)=s_1s_2\cdot k_1k_2+(1-s_1)s_2e+$$
$$+s_1(1-s_2)\cdot k_1+(1-s_1)(1-s_2)e=$$

$$=s_1s_2\cdot k_1k_2+s_1\cdot(1-s_2)k_2+(1-s_1)e$$

Інтегрування цих виразів приведе до аналогічного визначнику.

$$f_1(k_1,k_2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_2 \\ []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []k_1k_2b_1 & []k_1k_2b_2 \\ []k_1k_2-k_1b_1 & []k_1k_2-k_1b_2 \end{vmatrix}$$

$$f_2(k_1,k_2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_2 \\ []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []k_1k_2b_1 & []k_1k_2b_2 \\ []k_1k_2-k_1b_1 & []k_1k_2-k_1b_2 \end{vmatrix}$$

$$f_3(k_1,k_2)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_1}b_2 \\ []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_1 & []\frac{\partial\sigma}{\partial s_2}b_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} []k_1k_2b_1 & []k_1k_2b_2 \\ []k_1k_2-k_1b_1 & []k_1k_2-k_1b_2 \end{vmatrix}$$

Далі до кожного з цих функціоналів необхідно застосувати відображенням σ^* за формулою.

$$\sigma_M(f_i)(k_1,k_2,k_3) = -f_i(h_1 \triangleright g_2,(h_1 \triangleleft g_2)h_2 \triangleright g_3) + f_i(g_2,h_2 \triangleright g_3)$$
$$\sigma_N(f_i)(k_1,k_2,k_3) = f_i(h_1 \triangleleft g_2(h_2 \triangleright g_3),h_2 \triangleleft g_3) - f_i(h_1 \triangleleft g_2,h_2).$$

Аналогічно спростимо його для нашої групи, у якій $\triangleleft \equiv id$.

$$\sigma_M(f_i)(k_1,k_2,k_3) = -f_i(h_1 \triangleright g_2,h_1h_2 \triangleright g_3) + f_i(g_2,h_2 \triangleright g_3)$$
$$\sigma_N(f_i)(k_1,k_2,k_3) = f_i(h_1,h_2) - f_i(h_1,h_2) = 0$$

Підставляючи сюди значення, отримані вище і відповідні матричні координати, отримуємо відповідні коцикли.

Висновки до розділу 2

У доному розділі роглянуто групу Лі, що складається із прямого добутку групи поворотів тривимірного простору і групи паралельних зсувів; побудовано відповідні алгебри Лі, описані 2 і 3-когомології на алгебрах Лі, отримані проінтегровано і отримано відповідні 2 і 3-коцикли на групах Лі. Далі за допомогою цих груп застосуванням відповідних відображень знайдено групу 3-коциклів, що є ключовим компонентом конструкції подвіного схрещеного добутку.

ВИСНОВКИ

Отже, у роботі було побудовано новий приклад квантової групи за допомогою подвійного схрещеного добутку. У роботі була розглянута загальна конструкція подвійного схрещеного добтку, описаний спрощений метод обчислення коциклів, необхідних для конструкції. Далі ця конструкція була застосована до однозв’язної підгрупи групи рухів тривимірного простору. Для цього було знайдено необхідні когомологічні групи відповідних алгебр Лі, шляхом інтегрування перенесено їх на групу Лі. Після цього було застосовано відображення точної послідовності і отримані коцикли, необхіні для подвійного схрещеного добутку.

ДОДАТОК А

МАТЕРІАЛИ ПРЕЗЕНТАЦІЇ

Квантизація групи рухів тривимірного простору за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку

студент групи КА-61м

Михайловський В.В.

Попередні відомості

Розвиток теорії квантових груп привів до зв'язку теорії з багатьма, на перший погляд, далекими областями математики та фізики. Так, в математиці квантові групи мають тісні зв'язки зі спеціальними функціями, інвариантами вузлів та тривимірних многовидів, теорією представлень, операторними алгебрами, некоммутативною геометрією та комбінаторикою. У фізиці мають місце зв'язки з методом квантової оберненої задачі розсіювання, теорією інтегрованих моделей, фізикою елементарних часток, конформною та квантовою теорією поля та ін.

Попередні відомості

Квантова група є алгеброю фон Неймана (*M*) із додатковою операцією

$$\Delta : M \to M \otimes M$$

А також двома мірами φ та ψ, що задовольняють співвідношення

$$\varphi\big((\omega \otimes \iota)\Delta(x)\big) = \varphi(x)\omega(1)$$

$$\psi\big((\iota \otimes \omega)\Delta(x)\big) = \psi(x)\omega(1)$$

Особливу цікавість представляють некоммутативні і не кокоммутативні алгебри.

Попередні відомості

Нехай G, G_1, G_2 – групи Лі такі, що

- G_1, G_2 – підгрупи G; $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ із діями α, β
- *U*, *V* – відображення з $G_1 \otimes G_1 \otimes G_2$ та $G_1 \otimes G_2 \otimes G_2$ у U(1), що задовольняють:

$$\mathcal{U}(g,h,\alpha_k(s))\,\mathcal{U}(gh,k,s) = \mathcal{U}(h,k,s)\,\mathcal{U}(g,hk,s),$$
$$\mathcal{V}(\beta_s(g),t,r)\,\mathcal{V}(g,s,rt) = \mathcal{V}(g,s,t)\,\mathcal{V}(g,ts,r),$$
$$\mathcal{V}(gh,s,t)\,\bar{\mathcal{U}}(g,h,ts) = \bar{\mathcal{U}}(g,h,s)\,\bar{\mathcal{U}}(\beta_{\alpha_h(s)}(g),\beta_s(h),t)\,\mathcal{V}(g,\alpha_h(s),\alpha_{\beta_s(h)}(t))\,\mathcal{V}(h,s,t)$$

Тоді задавши *W* за формулою

$$\hat{W} = (\beta \otimes \iota \otimes \iota)\big((W_{G_1} \otimes 1)\mathcal{U}^*\big)\ (\iota \otimes \iota \otimes \alpha)\big(\mathcal{V}(1 \otimes \hat{W}_{G_2})\big)$$

Можемо отримати комноження $\Delta(z) = W^*(1 \otimes z)W$

Попередні відомості

Для побудови цих коциклів була отримана точна послідовність

$$\ldots \longrightarrow H^2(K) \xrightarrow{\pi_*^2} H^2(M) \oplus H^2(N) \xrightarrow{\sigma_*}$$

$$\xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{E(M,N)} \xrightarrow{\iota_*} H^3(K) \xrightarrow{\pi_*^3} H^3(M) \oplus H^3(N) \longrightarrow \ldots$$

Де *E(M, N)* – група коциклів, а $H^i(K)$ – гомологічні групи

Попередні відомості

Побудова гомологічних груп на алгебрі Лі відбувається за рахунок операторів

$$(d^{n-1}f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n)$$

$$H^3(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\ d^3 \backslash \mathrm{Im}\ d^2 \qquad H^2(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\ d^2 \backslash \mathrm{Im}\ d^1$$

Перенесення на групу Лі з алгебри відбувається за формулою

$$f(k^1, k^2, k^3) = \int\limits_{\sigma(k^1, k^2, k^3)} \omega$$

Опис отриманих результатів

Група рухів еквівалентна групі матриць

$$k = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & b_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & b_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Було обрано наступні підгрупи

$$m = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Опис отриманих результатів

Для знаходження когомологічних груп запишемо матриці операторів у базисі індикаторних функцій

$$A_{d^2} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Опис отриманих результатів

$$A_{d^3} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Розв'язуючи відповідні системи лінійних рівняннь, отримуємо, що базисом у когомологіях є

$$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3; \quad b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$$